# ขอบเขตของจำนวนโดมิเนชันของกราฟการรวมจุดยอดของวง

## (Bounds of Domination Numbers of Vertex–Amalgamations of Cycles)


ผู้ค้นคว้า : นายธนาธิป อุทธิยา

อาจารย์ที่ปรึกษา : รองศาสตราจารย์ ดร.สายัญ ปันมา

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่


## บทคัดย่อ


ให้ $D \subseteq V(G)$ จะเรียก $D$ ว่า **เซตโดมิเนติง** (dominating set) ของ $G$ ถ้าทุกจุดยอดใน $V(G) - D$ ประชิดกับบางจุดยอดใน $D$ **จำนวนโดมิเนชัน** (domination number) ของ $G$ แทนด้วยสัญลักษณ์ $\gamma(G)$ คือ **จำนวนเชิงการนับ** (cardinal number) ที่น้อยที่สุดของเซตโดมิเนติงของ $G$ ในการค้นคว้าอิสระนี้ เราได้ศึกษาการหาขอบเขตบนและขอบเขตล่างของจำนวนโดมิเนชันของ **กราฟการรวมจุดยอด** (vertex – amalgamation) ของวง


## ความรู้พื้นฐาน

**กำหนดให้**

วง $C_n$ (cycle of order $n$) หรือวงความยาว $n$ คือวงที่มีเส้นเชื่อม $n$ เส้น ($n$ จุดยอด) เพื่อความสะดวกเราจะกำหนดให้ $V(C_n) = \{1,2,\dots,n\}$ และ $E(C_n) = \{k(k+1) | k = 1,\dots,n-1\} \cup \{n1\}$

**บทนิยาม** ให้ $C_n^1, C_n^2, C_n^3, \dots, C_n^m$ เป็นวงความยาว $n$ โดยที่

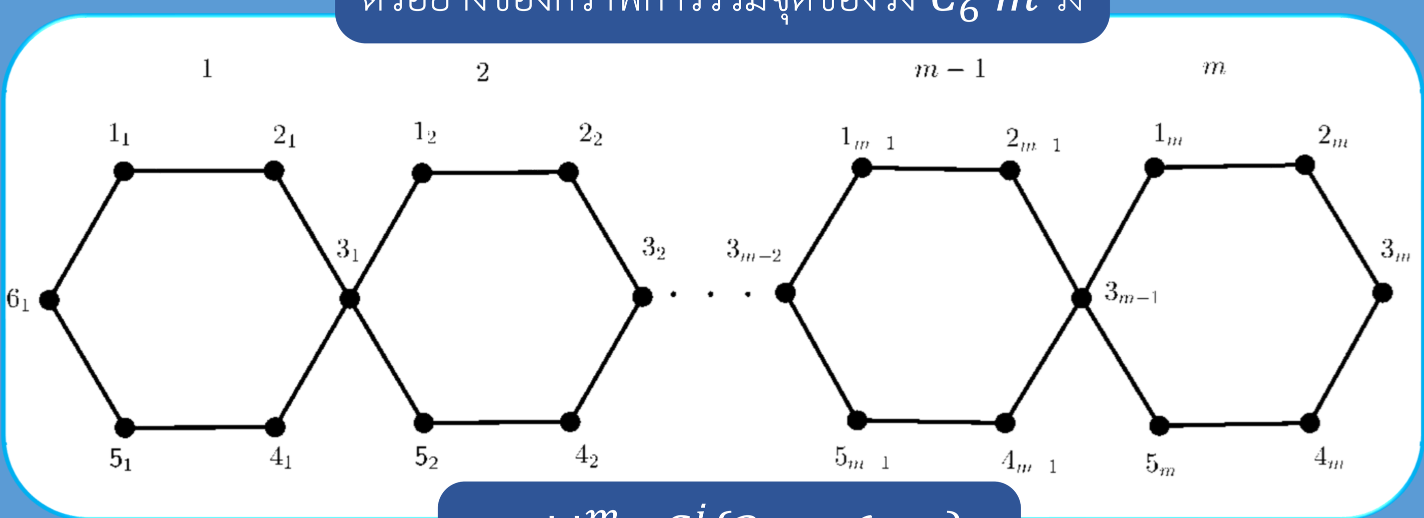
$V(C_n^i) = \{1_i, 2_i, 3_i, \dots, n_i\}$ สำหรับทุก $i = 1,2,3,\dots,m$

$E(C_n^i) = \{k_i(k+1)_i | k = 1,2,3,\dots,n-1\} \cup \{n_i 1_i\}$ สำหรับทุก $i = 1,2,3,\dots,m$

$V(C_n^i) \cap V(C_n^{i+1}) = \{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor_i = n_{i+1}\}$ สำหรับทุก $i = 1,2,3,\dots,m-1$

กำหนด **กราฟการรวมจุด (vertex-amalgamation) ของวง $C_n$ $m$ วง** เขียนแทนด้วย $\bigcup_{i=1}^{m} C_n^i \left\{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor_i = n_{i+1}\right\}$ คือกราฟที่มีเซตของจุดยอดเป็น $\bigcup_{i=1}^{m} V(C_n^i)$ และเซตของเส้นเชื่อมคือ $\bigcup_{i=1}^{m} E(C_n^i)$

## ตัวอย่างของกราฟการรวมจุดของวง $C_6$ $m$ วง




รูป $\bigcup_{i=1}^{m} C_6^i\{3_i = 6_{i+1}\}$

## ผลการศึกษา

ให้ $G = \bigcup_{i=1}^{m} C_n^i \left\{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor_i = n_{i+1}\right\}$ เป็นกราฟรวมจุดยอดของวง จะได้ว่า

1. ถ้า $n$ เป็นจำนวนเต็มคี่ ที่ $n \geq 6$ และ $n \equiv 1(mod\,3)$ และ

$$S_1 = \left\{k_1 \,\middle|\, k \equiv 1(mod\,3), 1 \leq k \leq \tfrac{n-1}{2}\right\} \cup \left\{k_1 \,\middle|\, k \equiv 2(mod\,3), \tfrac{n+1}{2} \leq k \leq n\right\}$$
$$S_2 = \left\{k_2 \,\middle|\, k \equiv 1(mod\,3), 1 \leq k \leq \tfrac{n-1}{2}\right\} \cup \left\{k_2 \,\middle|\, k \equiv 2(mod\,3), \tfrac{n+1}{2} \leq k \leq n\right\}$$
$$\vdots$$
$$S_m = \left\{k_m \,\middle|\, k \equiv 1(mod\,3), 1 \leq k \leq \tfrac{n-1}{2}\right\} \cup \left\{k_m \,\middle|\, k \equiv 2(mod\,3), \tfrac{n+1}{2} \leq k \leq n\right\}$$

แล้ว $S = \bigcup_{i=1}^{m} S_i$ เป็นเซตโดมิเนติงของ $G$ และ $\left\lceil\frac{m}{2}\right\rceil\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil \leq \gamma(G) \leq \left(2m\left\lfloor\frac{\frac{n-1}{2}-2}{3}\right\rfloor + 2m\right) + 1$

2. ถ้า $n$ เป็นจำนวนเต็มคี่ ที่ $n \geq 6$ และ $n \equiv 2(mod\,3)$ และ

$$S_1 = \{k_1 | k \equiv 2(mod\,3), 1 \leq k \leq n\}$$
$$S_2 = \{k_2 | k \equiv 2(mod\,3), 1 \leq k \leq n-3\}$$
$$\vdots$$
$$S_m = \{k_m | k \equiv 2(mod\,3), 1 \leq k \leq n-3\}$$

แล้ว $S = \bigcup_{i=1}^{m} S_i$ เป็นเซตโดมิเนติงของ $G$ และ $\left\lceil\frac{m}{2}\right\rceil\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil \leq \gamma(G) \leq m\left(\left\lfloor\frac{n-3}{3}\right\rfloor + 1\right) + 1$

3. ถ้า $n$ เป็นจำนวนเต็มคี่ ที่ $n \geq 6$ และ $n \equiv 0(mod\,3)$ และ $m$ เป็นจำนวนเต็มคี่ และ

$$S_1 = \{k_1 | k \equiv 1(mod\,3), 1 \leq k \leq n\}$$
$$S_2 = \{k_2 | k \equiv 0(mod\,3), 1 \leq k \leq n-3\}$$
$$\vdots$$
$$S_m = \{k_m | k \equiv 1(mod\,3), 1 \leq k \leq n-2\}$$

แล้ว $S = \bigcup_{i=1}^{m} S_i$ เป็นเซตโดมิเนติงของ $G$ และ $\left\lceil\frac{m}{2}\right\rceil\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil \leq \gamma(G) \leq \left(\frac{m+1}{2}\right)\left(\left\lfloor\frac{n-3}{3}\right\rfloor + 1\right) + \left(\frac{m-1}{2}\right)\left(\left\lfloor\frac{n-3}{3}\right\rfloor\right)$

4. ถ้า $n$ เป็นจำนวนเต็มคี่ ที่ $n \geq 6$ และ $n \equiv 0(mod\,3)$ และ $m$ เป็นจำนวนเต็มคู่ และ

$$S_1 = \{k_1 | k \equiv 1(mod\,3), 1 \leq k \leq n\}$$
$$S_2 = \{k_2 | k \equiv 0(mod\,3), 1 \leq k \leq n-3\}$$
$$\vdots$$
$$S_m = \{k_m | k \equiv 0(mod\,3), 1 \leq k \leq n-3\}$$

แล้ว $S = \bigcup_{i=1}^{m} S_i$ เป็นเซตโดมิเนติงของ $G$ และ $\left\lceil\frac{m}{2}\right\rceil\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil \leq \gamma(G) \leq \left(\frac{m}{2}\right)\left(\left\lfloor\frac{n-3}{3}\right\rfloor + 1\right) + \left(\frac{m}{2}\right)\left(\left\lfloor\frac{n-3}{3}\right\rfloor\right)$

5. ถ้า $n$ เป็นจำนวนเต็มคู่ ที่ $n \geq 6$ และ $n \equiv 1(mod\,3)$ และ

$$S_1 = \left\{k_1 \,\middle|\, k \equiv 0(mod\,3), 1 \leq k \leq \tfrac{n}{2}\right\} \cup \left\{k_1 \,\middle|\, k \equiv 1(mod\,3), \tfrac{n}{2}+1 \leq k \leq n\right\}$$
$$S_2 = \left\{k_2 \,\middle|\, k \equiv 0(mod\,3), 1 \leq k \leq \tfrac{n}{2}\right\} \cup \left\{k_2 \,\middle|\, k \equiv 1(mod\,3), \tfrac{n}{2}+1 \leq k \leq n-2\right\}$$
$$\vdots$$
$$S_m = \left\{k_m \,\middle|\, k \equiv 0(mod\,3), 1 \leq k \leq \tfrac{n}{2}\right\}$$

แล้ว $S = \bigcup_{i=1}^{m} S_i$ เป็นเซตโดมิเนติงของ $G$ และ $\left\lceil\frac{m}{2}\right\rceil\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil \leq \gamma(G) \leq m\left(\left\lfloor\frac{\frac{n}{2}-2}{3}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{\frac{n}{2}+1}{3}\right\rfloor\right) + 1$

6. ถ้า $n$ เป็นจำนวนเต็มคู่ ที่ $n \geq 6$ และ $n \equiv 2(mod\,3)$ และ $m$ เป็นจำนวนเต็มคี่ และ

$$S_1 = \{k_1 | k \equiv 1(mod\,3), 1 \leq k \leq n-1\}$$
$$S_2 = \{k_2 | k \equiv 0(mod\,3), 1 \leq k \leq n-3\}$$
$$\vdots$$
$$S_m = \{k_m | k \equiv 1(mod\,3), 1 \leq k \leq n-1\}$$

แล้ว $S = \bigcup_{i=1}^{m} S_i$ เป็นเซตโดมิเนติงของ $G$

และ $\left\lceil\frac{m}{2}\right\rceil\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil \leq \gamma(G) \leq \left(\frac{m+1}{2}\right)\left(\left\lfloor\frac{n-1}{3}\right\rfloor + 1\right) + \left(\frac{m-1}{2}\right)\left(\left\lfloor\frac{\frac{n}{2}-1}{3}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{\frac{n}{2}-3}{3}\right\rfloor + 1\right)$

7. ถ้า $n$ เป็นจำนวนเต็มคู่ ที่ $n \geq 6$ และ $n \equiv 2(mod\,3)$ และ $m$ เป็นจำนวนเต็มคู่ และ

$$S_1 = \{k_1 | k \equiv 1(mod\,3), 1 \leq k \leq n-1\}$$
$$S_2 = \{k_2 | k \equiv 0(mod\,3), 1 \leq k \leq n-3\}$$
$$\vdots$$
$$S_m = \{k_m | k \equiv 0(mod\,3), 1 \leq k \leq n-3\}$$

แล้ว $S = \bigcup_{i=1}^{m} S_i$ เป็นเซตโดมิเนติงของ $G$

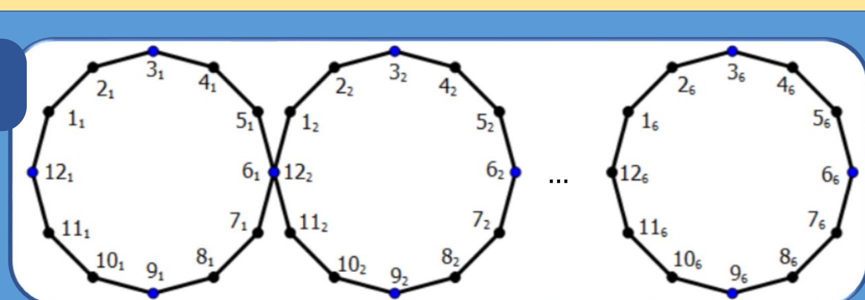
และ $\left\lceil\frac{m}{2}\right\rceil\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil \leq \gamma(G) \leq \left(\frac{m+1}{2}\right)\left(\left\lfloor\frac{n-1}{3}\right\rfloor + 1\right) + \left(\frac{m-1}{2}\right)\left(\left\lfloor\frac{\frac{n}{2}-1}{3}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{\frac{n}{2}-3}{3}\right\rfloor + 1\right)$

8. ถ้า $n$ เป็นจำนวนเต็มคู่ ที่ $n \geq 6$ และ $n \equiv 0(mod\,3)$ และ

$$S_1 = \{k_1 | k \equiv 0(mod\,3), 1 \leq k \leq n\}$$
$$S_2 = \{k_2 | k \equiv 0(mod\,3), 1 \leq k \leq n-3\}$$
$$\vdots$$
$$S_m = \{k_m | k \equiv 0(mod\,3), 1 \leq k \leq n-3\}$$

แล้ว $S = \bigcup_{i=1}^{m} S_i$ เป็นเซตโดมิเนติงของ $G$ และ $\left\lceil\frac{m}{2}\right\rceil\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil \leq \gamma(G) \leq m\left\lfloor\frac{n-3}{3}\right\rfloor + 1$

**ตัวอย่าง**



รูป $\bigcup_{i=1}^{6} C_{12}^i\{6_i = 12_{i+1}\}$

## เอกสารอ้างอิง


[1] C. Berge,“Graphs and Hypergraphs” North Holland Amsterdam,1973.

[2] R. Cherifi, S. Gravier, X. lagraula, C. Payan, and I. Zighham, “Domination number of cross products of paths”, Discrete Applied Mathematics, 94(1999), 101-139.

[3] E. Cockayne, S. T. Hedetniemi, “Towards a theory of domination in graphs”, Networks Fall, (1977), 247-261.

[4] T. W. Haynes , S. T. Hedetniemi and P. J. Slater (1998) , “Fundamentals of Domination in Graphs” , Marcel Dekker, New York, 1998.

[5] S. Klaviar and N. Seifter, “Dominating Cartesian products of cycles”, Discrete Applied Mathematics, 59(1995), 129-136.

[6] ประดับพร วงษ์แก้ว, “จำนวนโดมิเนชันของกราฟหนังสือ”, บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยเชียงใหม่, (2016).

[7] มณฑิญา เรืองหน่าย, “การแจงนับและจำนวนโดมิเนชันของกราฟปะติดของวิถี”, บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยเชียงใหม่, (2019).

[8] นันทวัฒน์ อ่อนสอาด, “เซตโดมิเนติงของกราฟการรวมจุดและกราฟการรวมเส้นของวัฏจักร $C_n$ $m$ วัฏจักร”, ภาควิชาคณิตศาสตร์, คณะวิทยาศาสตร์